

Математика

Математический анализ

для студентов инженерных направлений

Учебное пособие

Математика

Математический анализ

для студентов инженерных направлений

студента(ки) _____ курса _____ факультета

группы № _____

направления _____

Ставрополь
2020

УДК
ББК
М

Авторский коллектив:

Татьяна Александровна Гулай

Виктория Артемовна Жукова

Анна Федоровна Долгополова

Математика : Математический анализ : учебное пособие / Т.А. Гулай, В.А. Жукова, А.Ф. Долгополова. – Ставрополь: 2020. – 130 с.

Учебное пособие входит в серию методических разработок, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам математического анализа в математике. В пособии приводятся примеры задач в каждом разделе с подробным решением, задания для решения в аудитории и типовые варианты расчетно-графических работ по изучаемым темам.

УДК
ББК
М

Авторский коллектив, 2020

ГЛАВА 1 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1 Первообразная функции и неопределенный интеграл

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y = f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием**.

Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения C , можно получить все первообразные для данной функции $f(x)$, т.е. $F(x) + C$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$, где

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$; C - постоянная интегрирования;

x - переменная интегрирования; \int - знак интеграла.

Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется **интегрированием** данной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int A \cdot f(x) dx = A \int f(x) dx, A \neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо x любой дифференцируемой функции от x .

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u) du = F(u) + C$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$	15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$	17. $\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$
8. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
9. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	

Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \operatorname{ctgu} du = \ln |\sin u| + C$$

$$(\ln |\sin u| + C)' = \frac{(\sin u)'}{\sin u} = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{ctgu}$$

Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

1.2 Непосредственное интегрирование функций

1. Интегрирование по таблице.

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

3. Непосредственное интегрирование.

- Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ если } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C$$

- Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала. При любой постоянной a будет выполняться равенство: $d(x+a) = dx$. Значит, и наоборот $dx = d(x+a)$ и поэтому $\int f(x) dx = \int f(x) d(x+a)$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

- Введение под дифференциал постоянного множителя. Если $a = \text{const}$, то $d(ax) = adx$. Отсюда при $a \neq 0$ - $dx = \frac{1}{a} d(ax)$. Следовательно, $\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax)$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

- Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C$$

Решение типовых примеров

Найти неопределенный интеграл

Пример 1. $\int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1 \right) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1 \right) dx &= 2 \int x^3 dx - 3 \int x^{2/3} dx + 4 \int x^{-3} dx + \int dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^2} + x + C \end{aligned}$$

Пример 2. $\int 3^x \cdot e^{2x} dx$

Решение.

$$\int 3^x \cdot e^{2x} dx = \int (3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln(3e^2)} + C$$

Пример 3. $\int \frac{\sin 2x}{4 + \sin^2 x} dx$

Решение.

$$\int \frac{\sin 2x}{4 + \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{4 + \sin^2 x} dx = \int \frac{(4 + \sin^2 x)'}{4 + \sin^2 x} dx = \ln |4 + \sin^2 x| + C$$

Пример 4. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$

Решение.

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2} \ln |x^2+4x+5| + C$$

Задания для решения в аудитории

Найти указанные интегралы:

1) $\int \left(5x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{x^4} \right) dx$

2) $\int \left(x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x \right) dx$

$$3) \int e^{-3x} dx$$

$$4) \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$5) \int (3 - 2x)^4 dx$$

1.3 Интегрирование методом подстановки

Пусть $\int f(x) dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной x . Такой способ нахождения интеграла называется **методом замены переменной** или **методом подстановки**.

Задача нахождения неопределённых интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путём алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции или подведения части её множителей под знак дифференциала.

Подведение множителя под знак дифференциала

$dx = d(x+b), b = \text{const}$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$	$\cos x dx = d(\sin x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$
$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	$\sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$
$x dx = \frac{1}{2} d(x^2+b)$	$\cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно. Некоторые частные правила для важнейших типов интегралов даются в решениях типовых примеров.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1} dx$

Замечание: В данном примере с первого взгляда не определить, что подвести под знак дифференциала, а поэтому сделаем подстановку, позволяющую избавиться от иррациональности. Обозначим $\sqrt{x-1} = t$. Эта подстановка приводит исходный интеграл к новому интегралу, сводящемуся к табличному. Решение.

$$\int x\sqrt{x-1} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t \\ x = t^2 + 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int (t^2 + 1) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 + t^2) dt =$$

$$= \frac{2}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} (x-1)^{5/2} + \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + C$$

Если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $f(x)$, то есть выражение $f'(x)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = f(x)$.

Пример 2. Найти $\int \sqrt[3]{1+\sin x} \cdot \cos x dx$

Решение. $\int \sqrt[3]{1+\sin x} \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} 1+\sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^{1/3} dt = \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+\sin x)^4} + C$

Если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin \frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{-x^3} , то $t = -x^3$).

Задания для решения в аудитории

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$$

$$2) \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$$

$$3) \int x e^{-x^2} dx$$

$$4) \int x^5 \sqrt{(5x^2 - 3)^7} dx$$

$$5) \int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$$

1.4 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Данная формула называется **формулой интегрирования по частям**. Применять её целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях формулу необходимо применять несколько раз.

Метод интегрирования по частям рекомендуется для нахождения интегралов от функций $x^k \cdot \sin \alpha x$; $x^k \cdot \cos \alpha x$; $x^k \cdot e^{\alpha x}$; $x^n \cdot \ln x$; $a^{\beta x} \sin \alpha x$; $a^{\beta x} \cos \alpha x$; $\arcsin x$; $\arctg x$ и т.д., где n, k - целые положительные постоянные, $\alpha, \beta \in R$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Основные типы интегралов, «берущихся» по частям

Тип	Интеграл	u	dv
I	$\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int p(x) \cdot \sin \alpha x dx$	$p(x)$	$\sin \alpha x dx$
	$\int p(x) \cdot \cos \beta x dx$	$p(x)$	$\cos \beta x dx$
II	$\int p(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arccos x dx$	$\arccos x$	$p(x) dx$
III	$\int e^{\alpha x} \cdot \sin \alpha x dx$	$e^{\alpha x}$	$\sin \alpha x dx$
		$\sin \alpha x$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx$	$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x} dx$
		$\cos \beta x$	$\cos \beta x dx$
	$\int \sin(\ln x) dx$	$\sin(\ln x)$	dx

Замечания:

1. Интегралы 1-го типа берутся n -кратным интегрированием, если $P(x)$ - многочлен n -й степени.
2. Под знаком интегралов 2-го типа стоят функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\ln x$, от которых интеграл не существует.
3. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int x \cdot e^{-2x} dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-2x} dx &= \left| \begin{array}{l} x = u; e^{-2x} dx = dv \\ dx = dv; v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C; (C = 0) \end{array} \right| = \\ &= x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx = -\frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int x \cdot \arctg x dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x; dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C \end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории

Найти данные неопределённые интегралы:

1) $\int x^2 \cdot \cos x dx$

2) $\int e^x \cdot \sin x dx$

3) $\int (x^2 - 2x + 5) \cdot e^{-x} dx$

4) $\int x \cdot \ln(x - 3) dx$

5) $\int x \cdot 2^{3x} dx$

1.5 Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов. Рациональные функции иначе называются *рациональными дробями*.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя.

Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя больше или равна степени знаменателя.

Если дробь правильная, то можно начинать интегрирование.

Если дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, представляют в виде суммы простейших (элементарных) дробей.

Теорема. *Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен.*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Пример.

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 4x + 5 + \frac{4}{x - 1} \\ \begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 4x^2 + x - 1 \\ \underline{4x^2 - 4x} \\ 5x - 1 \\ \underline{5x - 5} \\ 4 \end{array} \end{array}$$

4 – неделимый остаток

Всякую правильную дробь можно единственным образом разложить на простейшие (элементарные) дроби. Существует **3 типа элементарных дробей**:

$$1. \frac{A}{x - a} \text{ - I тип; } \quad 2. \frac{A}{(x - a)^n} \text{ - II тип; } \quad 3. \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \text{ - III тип}$$

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

1) Если знаменатель содержит различные линейные множители:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \quad \begin{array}{l} A - ? \\ B - ? \\ C - ? \end{array}$$

2) Если знаменатель содержит повторяющиеся линейные множители:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \frac{C_3}{(x-c)^3};$$

$$A - ? \quad B_1 - ? \quad B_2 - ?$$

$$C_1 - ? \quad C_2 - ? \quad C_3 - ?$$

3) Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{Cx + D}{x^2 + p_2x + q_2}$$

Интегрирование простейших дробей.

Интеграл от простейшей дроби:

$$1) \quad \text{I типа: } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{1}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$2) \quad \text{II типа: } \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$3) \quad \text{III типа} \quad (D < 0)$$

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} \right) - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2$$

Подставим полученное выражение в интеграл 3го типа:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= A \int \frac{x}{x^2 + px + q} dx + B \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{2} A \int \frac{(2x + p) - p}{x^2 + px + q} dx + \\ &+ B \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2} = \frac{1}{2} A \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{p}{2} A \right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} A \ln|x^2 + px + q| + \left(B - \frac{p}{2} A \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \end{aligned}$$

Метод неопределенных коэффициентов (для нахождения значений A, B, C, \dots)

Это один из наиболее распространенных методов определения коэффициентов A, B, C, \dots в разложении правильной рациональной дроби на простейшие.

Сущность метода состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной x числителей дробей.

Для определения числителя правой части простейшие дроби приводят к общему знаменателю и числитель полученной новой дроби приравнивают к числителю подынтегральной дроби. Получится система « n » уравнений с « n » неизвестными A, B, C, \dots , которая имеет единственное решение, так как разложение правильной рациональной дроби на простейшие всегда возможно и единственно.

Замечания: 1) Если знаменатель правильной рациональной дроби разлагается только на линейные множители вида $(x-a)(x-b)(x-c)$, то можно применять **метод частных значений** для нахождения коэффициентов A, B, C, \dots , придавая x значения $x=a; x=b; x=c$

Пример.
$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$2x^2 + 10x - 18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$$

$$\begin{array}{l|l} x=1 & -6 = A \cdot 3(-2) \quad A=1 \\ x=-2 & -30 = B(-3)(-5) \quad B=-2 \\ x=3 & 30 = C \cdot 2 \cdot 5 \quad C=3 \end{array}$$

2) Во многих примерах удобно применять комбинированный метод: вместе использовать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13} dx$

Решение. Т.к. $x^2+4x+13 = (x+2)^2+9$, то:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{x^2+4x+13} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4-4-\frac{4}{3}}{(x+2)^2+9} dx = \frac{3}{2} \left(\int \frac{2x+4}{(x+2)^2+9} dx - \int \frac{(4+\frac{4}{3})dx}{(x+2)^2+9} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{(x+2)^2+9} dx - 8 \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+13| - 8 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C \end{aligned}$$

Замечание: Если в интеграле квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c ($a \neq 0$), то для отыскания этого интеграла коэффициент a в знаменателе

выносят за скобки: $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

Пример 2. Найти $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x-4) + (4-\frac{2}{3})}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}} - 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \\ &= 3\sqrt{x^2-4x+8} - 5 \ln|x-2+(x-2)^2+4| + C \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2} dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2-2+\frac{10}{3}}{(x^2+2x+5)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)^2} + 2 \int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2x+5} + 2 \left(\frac{x+1}{8((x+1)^2+4)} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{4+(x+1)^2} \right) = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{8} \arctg \frac{x+1}{2} + C \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx$

Решение.

В соответствии с формулой разложение на элементарные дроби имеет вид:

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \right) dx \quad (1)$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции, а числители подынтегральной функции в левой и правой частях формулы (1) будут тождественно равными, то есть:

$$2x-3 = A(x-1) \cdot (x-2) + Bx \cdot (x-2) + C(x-1) \quad (2)$$

Найдём коэффициенты A , B , C **методом неопределённых коэффициентов.**

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (2), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 | 0 = A + B + C \\ x^1 | 2 = -3A - 2B - C \\ x^0 | -3 = 2A \end{array} \right\}, \text{ решение которой: } \begin{cases} -3 = 2A; \\ -1 = -B; \\ 1 = 2C \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = 1 \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Подставив в равенство (1) найденные значения коэффициентов, окончательно имеем:

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx = \int \left(-\frac{3/2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2} \right) dx = -\frac{3}{2} \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x-2| + C$$

Задания для решения в аудитории

Найти данные неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$2) \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$$

$$3) \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+18}} dx$$

$$4) \int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx$$

$$5) \int \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} dx$$

$$6) \int \frac{2x^3 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$$

$$7) \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx$$

1.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Для отыскания интегралов вида:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx; \int \sin mx \cdot \sin nx dx; \int \cos mx \cdot \cos nx dx$$

используют следующие формулы:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$$

При нахождении интегралов вида $\int \cos^m x \cdot \sin^n x dx$ возможны следующие случаи:

1) одно из чисел m или n - нечётное, например $m = 2k + 1$. Тогда:

$$\int \cos^m x \cdot \sin^n x dx = \int \cos^{2k} x \cdot \sin^n x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^k \cdot \sin^n x d(\sin x),$$

то есть получим интегралы от степенных функций;

2) оба числа m и n - чётные. Тогда рекомендуется использовать формулы, понижающие степень тригонометрических функций:

$$2\cos^2 \alpha x = 1 + \cos 2\alpha x; \quad 2\sin^2 \alpha x = 1 - \cos 2\alpha x$$

Интегралы вида $\int R(\cos x; \sin x)$, где R - рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

В этом случае:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

В случае, когда имеет место тождество:

$$R(-\cos x; -\sin x) \equiv R(\cos x; \sin x),$$

для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять упрощённую подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

$$\text{При этом: } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Если тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ входят в выражение функции R только в чётных степенях, то гораздо быстрее к цели ведёт подстановка $t = \operatorname{tg} x$, при этом: $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

С помощью этой же подстановки берутся интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int \cos(2x-1) \cdot \cos(3x-5) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \cos(2x-1) \cdot \cos(3x-5) dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(x+6) + \cos(5x+4)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(x+6) d(x+6) + \frac{1}{10} \int \cos(5x+4) d(5x+4) = \frac{1}{2} \sin(x+6) + \frac{1}{10} \sin(5x+4) + C \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \cos^7 x \cdot \sin^3 x dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \cos^7 x \cdot \sin^3 x dx &= \int \cos^7 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx = - \int \cos^7 x \cdot (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \\ &= - \int \cos^7 x d(\cos x) + \int \cos^9 x d(\cos x) = -\frac{1}{8} \cos^8 x + \frac{1}{10} \cos^{10} x + C \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dx}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \\ &= \ln|1+t| + C = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории

Найти данные неопределенные интегралы:

1) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

2) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$

3) $\int \sin^2 3x dx$

4) $\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$

ГЛАВА 2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Определенный интеграл и его основные свойства

Определение 3. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_i в каждом из них, то этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Обозначается $\int_a^b f(x)dx$, а сама функция называется интегрируемой подынтегральной функцией на $[a; b]$, то есть $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

При этом число a называется нижним пределом интегрирования, b - верхним пределом, x - переменной интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

1) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.:

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx ;$$

2) Определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx ;$$

3) Свойство аддитивности.

Если отрезок $[a; b]$ разбит на две части $[a; c]$ и $[c; b]$, то:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx ;$$

4) Если подынтегральная функция в интервале интегрирования не меняет знака, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция:

$$\int_a^a f(x) dx = 0; \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

5) Если на интервале $[a; b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \leq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$.

2.2 Правила вычисления определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и функция $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$, то определённый интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, то есть:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Нахождение определённых интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два шага:

- на первом шаге, используя технику нахождения неопределённого интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для $f(x)$;

- на втором подсчитывают разность значений первообразной в точках a и b . Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$, то есть:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона-Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например, имеющую более простой вид при $c = 0$.

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x); v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции на $[a;b]$, тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Интегрирование чётной и нечётной функции

Если $f(x)$ - чётная функция, то есть $f(-x) = f(x)$, то:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Если $f(x)$ - нечётная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x \cdot \cos 2x dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \cdot \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = \cos 2x dx; v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sin 4\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin 0 + \frac{1}{4} \cdot \cos 4\pi - \frac{1}{4} \cdot \cos 0 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx$.

Решение. Функция $f(x) = \sin^2 x$ - чётная, так как:

$$f(-x) = \sin^2(-x) = [\sin(-x)]^2 = [-\sin x]^2 = \sin^2 x = f(x).$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2x) dx = \left(x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решение.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \cdot \arcsin(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x)$$

Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ - нечётная, поэтому

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 \cdot \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0.$$

Задания для решения в аудитории

Вычислить интегралы

$$1) \int_2^3 \left(4x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$2) \int_0^2 3e^{\frac{x}{4}} dx$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$4) \int_1^2 e^{2x} \cdot \left(2 + \frac{x^3}{e^{2x}} \right) dx$$

$$5) \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$$

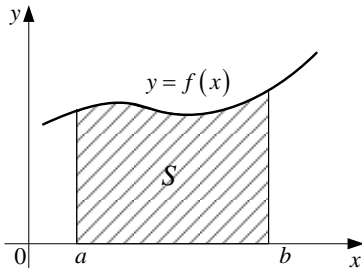
$$6) \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$7) \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

2.3 Приложения определенного интеграла

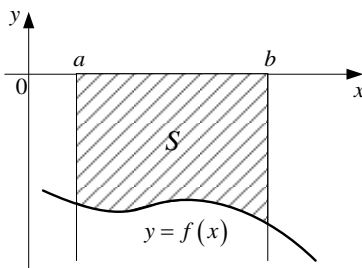
2.3.1 Вычисление площадей плоских фигур

1. Если на $[a; b]$ функция $f(x) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$ равна:



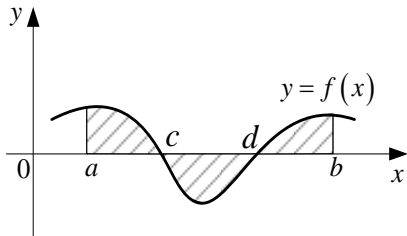
$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

2. Если на $[a; b]$ функция $f(x) \leq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$, равна:



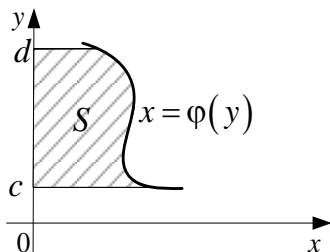
$$S = -\int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

3. Если функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a; b]$, то интеграл по всему отрезку $[a; b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Площадь такой криволинейной трапеции соответственно равна:



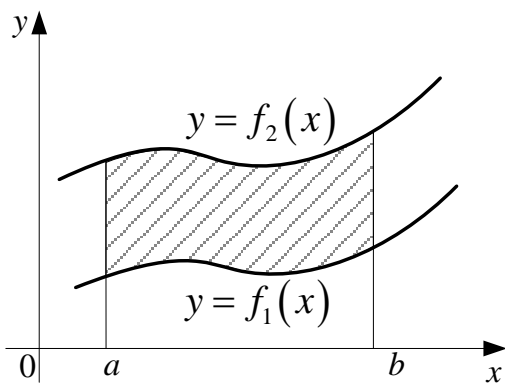
$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \quad (3)$$

4. Если основанием криволинейной трапеции является отрезок $[c; d]$ оси Oy , тогда площадь такой фигуры равна:



$$S = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (4)$$

5. Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \geq f_1(x)$. Тогда площадь фигуры, заключённой между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле:

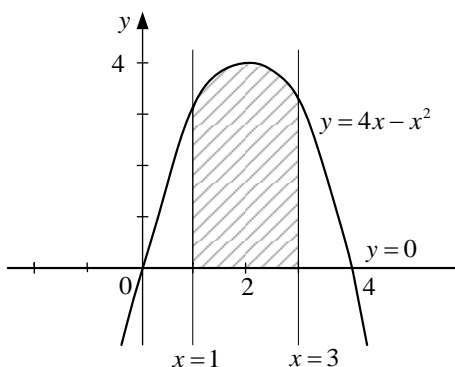


$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (5)$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$; $x = 1$; $x = 3$ и осью Ox .

Решение.



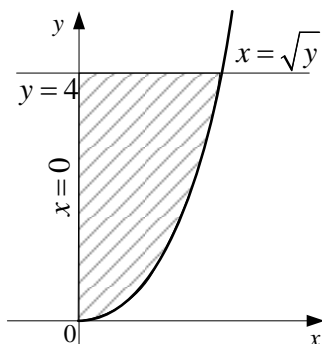
Воспользуемся формулой $S = \int_a^b f(x) dx$,

тогда $a = 1$; $b = 3$; $f(x) = 4x - x^2$, следовательно,

$$S = \int_1^3 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = 18 - 9 - 2 + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$; $x = 0$; $y = 4$.

Решение.



Воспользуемся формулой $S = \int_c^d \varphi(y) dy$, где

$$c = 0; d = 4; \varphi(y) = \sqrt{y}$$

$$\text{Тогда } S = \int_0^4 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} (4^{\frac{3}{2}} - 0) = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Задания для решения в аудитории

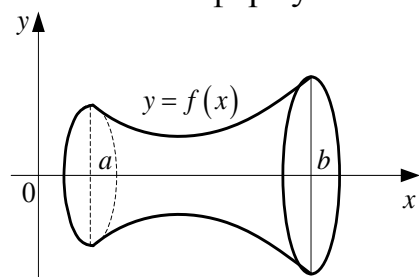
Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1) $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$

$$2) y = x; y = 2 - x^2$$

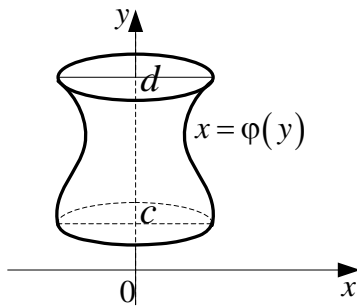
2.3.2 Вычисление объёмов тел вращения

1. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0; x = a; x = b$, вращается вокруг оси Ox , то объём тела вращения вычисляется по формуле:



$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (6)$$

2. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми $y = c; y = d; x = 0$, вращается вокруг оси Oy , то:



$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (7)$$

3. Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a; x = b$, вращается вокруг оси Ox , то объём тела вращения:

$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx \quad (8)$$

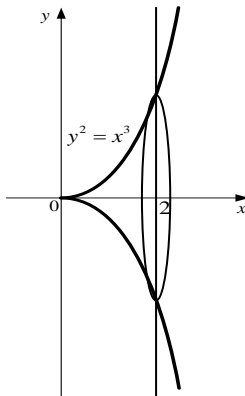
4. Если фигура ограничена кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ ($0 \leq \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$) и прямыми $y = c; y = d$ вращается вокруг оси Oy , то объём тела вращения:

$$V_y = \pi \int_c^d (\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)) dy \quad (9)$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$ и прямой $x = 2$.

Решение.



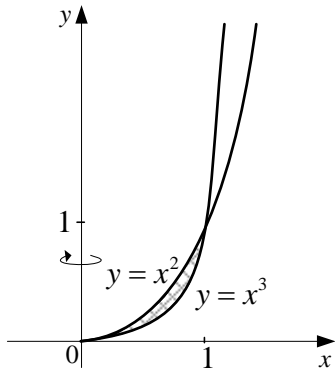
Применяя формулу $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$,

найдем:

$$V_x = \pi \int_0^2 x^3 dx = \pi \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{16}{4} \pi = 4\pi (\text{куб.ед.})$$

Пример 2. Найти объём тела, полученного от вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; y = x^3$

Решение.



Воспользуемся формулой:

$$V_y = \pi \int_c^d (\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)) dy,$$

где $c = 0; d = 1$, $\varphi_1(y) = \sqrt{y}; \varphi_2(y) = \sqrt[3]{y}$

Тогда:

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{y^2} - \sqrt{y^2}) dy = \pi \left(\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= \pi \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{10} \text{ (куб.ед.)} \end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории

Найти объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2 - 3x; y = 2x - 6$

2) $y = x^2; y = \sqrt{x}$

Найти объём тел, образованных вращением вокруг оси Oy фигур, ограниченных линиями:

$$1) y = x^2 + 1; y = 0; x = 1; x = 2$$

$$2) y = \frac{4}{x}; y = 0; x = 1; x = 4$$

ГЛАВА 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1 Область определения функции

Функции одной переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому вводится понятие функции нескольких переменных.

Все основные положения теории функции нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных и обобщаются на случай большего числа переменных.

Переменная величина z называется функцией двух независимых переменных x и y , если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области изменения D соответствует определённое единственное значение величины z .

Обозначается функция 2-х переменных:

$$z = f(x, y), \quad z = z(x, y), \quad F(x, y, z) = 0.$$

Множество пар (x, y) значений x и y , при которых определена функция $z = f(x, y)$ называется **областью определения функции** и обозначается $D(z)$ или $D(f)$.

Каждой паре значений (x, y) в плоскости xOy соответствует точка $M(x, y)$. Поэтому пару значений (x, y) называют точками, а функцию $z = f(x, y)$ называют функцией точки $M(x, y)$ плоскости xOy и записывают $z = f(M)$.

Решение типовых примеров

1 Найти область определения функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Решение

Функция z принимает действительные значения при условии $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, то есть $x^2 + y^2 \leq a^2$. Областью определения данной функции является круг радиуса a с центром в начале координат, включая граничную окружность.

2 Найти область определения функции $z = \ln(x^2 - y^2 - R^2)$, $R > 0$.

Решение

Область определения функции характеризуется неравенством

$x^2 - y^2 > R^2$. Область определения – внутренняя часть гиперболы

$\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$ с асимптотами $y = \pm x$, полуосями $a = b = R$, фокусами

$F_1 = (-R\sqrt{2}; 0), F_2 = (R\sqrt{2}; 0)$ ($c^2 = a^2 + b^2 = 2R^2$).

3.2 Частные производные функции нескольких переменных

Частной производной по x функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения по x $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю и обозначается z'_x , $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

По определению $z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Аналогично

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Значение частной производной зависит от точки, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная есть функция точки (x, y) , т.е. также является функцией 2-х переменных.

Частные приращения и производные функции n переменных ($n > 2$) определяются и обозначаются аналогично.

Из определения частных производных следует, что при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Все правила и формулы дифференцирования для функции одной переменной сохраняются для частных производных функции нескольких переменных.

Решение типовых примеров

1. Найти частные производные функций:

а) $z = e^{x^2+y^2}$;

Решение

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

б) $z = y \ln(x^2 - y^2)$.

Решение

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Задания для решения в аудитории.

1) Найти и изобразить область определения функции:

1.

$$z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$$

2.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

3.

$$z = \sqrt{xy}$$

4.

$$z = y + \sqrt{x}$$

5.

$$z = \frac{4}{x + y}$$

2) Найти частные производные функций:

1. $U = x^2 + 3xy + 4y^2$

2. $U = \sin(3x + 5y - 4z)$

3. $U = e^{\frac{x}{y}}$

$$4. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

3.3 Полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Главная часть полного приращения

$$\Delta z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

функции $z = f(x, y)$, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy , называется **полным дифференциалом** этой функции.

Обозначается полный дифференциал dz или $df(x, y)$.

По определению

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y \text{ или } dz = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y, \text{ или } dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Учитывая, что $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, можно записать $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ справедливы приближенные равенства $\Delta z \approx dz$ и $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz$. Это соотношение используется в приближенных вычислениях для нахождения значений функции $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ близких к значению функции $f(x_0, y_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Решение типовых заданий

1. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$.

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Следовательно,} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

2. Вычислить приближенно $1,07^{3,97}$.

Решение

Число $1,07^{3,97}$ есть частное значение функции $z = f(x, y)$ при $x = 1,07$, $y = 3,97$. Известно, что $f(1, 4) = 1$. Поэтому, принимаем $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Тогда

$$\Delta x = x - x_0 = 0,07, \quad \Delta y = y - y_0 = -0,03.$$

Значение $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ вычислим при помощи формулы $f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$. Имеем:

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x, \quad f'_x(1, 4) = 4, \quad f'_y(1, 4) = 0,$$

$$df(1, 4) = 4 \cdot 0,07 + 0 \cdot (-0,03) = 0,28.$$

Таким образом, $1,07^{3,97} \approx 1 + 0,28 = 1,28$.

Задания для решения в аудитории.

1). Найти полный дифференциал функций:

1. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

2. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

3. $z = x \sin y + y \sin x$

4. $z = \frac{xy}{x-y}$

5. $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3$ $y = 4$ $\Delta x = 0,1$ $\Delta y = 0,2$

6. $z = e^{xy}$ $x = 1$ $y = 1$ $\Delta x = 0,15$ $\Delta y = 0,1$

2.) Вычислить приближенно.

1. $(1,03)^{3,001}$

2. $\sqrt{(6,03)^2 + (8,04)^2}$

3.4 Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявной функции

Пусть $z = f(x, y)$ - функция двух переменных x и y , каждая из которых является функцией независимой переменной t , то есть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Тогда функция $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ является сложной функцией $z = z(t)$ независимой переменной t . Переменные x и y являются промежуточными аргументами.

Предположим, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые функции. Имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, например, $t = x$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

и $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной z по x .

Если аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ являются функциями двух переменных: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то $z = f(x(u, v), y(u, v))$ также является функцией двух переменных (u, v) .

Пусть $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ - дифференцируемые функции. Имеют место формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Дифференциал сложной функции $z = z(x, y)$ где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv.$$

Если $F(x, y)$ - дифференцируемая функция переменных x, y в некоторой области D и $F'_y(x, y) \neq 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ определяет однозначно

неявную функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле:

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Решение типовых примеров

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$ и $x = \cos 2t$, $y = \arctg t$.

Решение

Производную находим по формуле $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y) \cdot \sin 2t + (2x - 3y^2) \cdot \frac{1}{(1+t^2)}.$$

В результате можно сохранить как переменные x и y , так и заменить их через t .

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, где

$$z = \ln(u^2 + v^2), \quad u = x \cos y, \quad v = y \sin x.$$

Решение

$\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ находим по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y \cos x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \cdot \cos y + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot y \cos x = \frac{2}{U^2 + V^2} (U \cos y + Vy \cos x) =$$

$$= \frac{2}{x^2 \cos^2 y + y^2 \sin^2 x} (x \cos^2 y + y^2 \sin x \cos x);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2u}{u^2 + v^2} \cdot x \sin y + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \sin x = \frac{2}{U^2 + V^2} (V \sin x + Ux \sin y) = \\ &= \frac{2}{x^2 \cos^2 y + y^2 \sin^2 x} (y \sin^2 x - x^2 \sin y \cos y).\end{aligned}$$

3. $\cos(x + y) + y = 0$. Найти y' .

Решение

Здесь $F(x, y) = \cos(x + y) + y = 0$.

Найдем $\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x + y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(x + y) + 1$.

Следовательно, $y' = -\frac{-\sin(x + y)}{1 - \sin(x + y)} = \frac{\sin(x + y)}{1 - \sin(x + y)}$.

Задания для решения в аудитории.

1) Найти:

1. $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^2 + xy + y^2$, где $x = t^2$ $y = t^3$

2. $\frac{dU}{dt} - ?$ $U = \sin \frac{x}{y}$, где $x = e^t$ $y = t^2$

3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{dz}{dx} - ? \quad z = \ln(e^x + e^y), \text{ где } y = x^2$$

$$4. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v} \quad u = x \sin y \quad v = x \cos y \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

5.

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \text{ и } dz, \text{ если } z = \cos xy, \quad x = ue^v, \quad y = v \ln u.$$

2) Найти y' .

$$1. \quad x^2 + xy + y^2 = 6$$

$$2. e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$$

3.5 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Частные производные от частных производных $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ называются частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$.

Каждая частная производная первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеет две частные производные. Таким образом, получаем четыре частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y), & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y). \end{aligned}$$

Производные $f''_{xy}(x, y)$; $f''_{yx}(x, y)$ называются смешанными производными второго порядка и $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x , так и по y . Получим частные производные третьего порядка. Частная производная n -го порядка есть частная производная от производной $(n-1)$ -го порядка.

Дифференциал от дифференциала dz в точке $M(x, y)$ называется дифференциалом второго порядка в этой точке и обозначается d^2z .

$$\begin{aligned}
d(dz) &= d(f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy) = \\
&= f''_{x^2}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)(dy)^2, \\
d(dz) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.
\end{aligned}$$

Дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка называется дифференциалом n -го порядка функции $z = f(x, y)$: $d^n z = d(d^{n-1}z)$.

Выражение для dz символически можно записать в виде:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y).$$

При $n = 3$

$$\begin{aligned}
d^3 z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f(x, y) = \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.
\end{aligned}$$

Решение типовых примеров

1. Найти все частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^3 - x^2 y - y^3$.

Решение

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2. \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2xy) = 6x - 2y; \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy) = -2x; \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 - 3y^2) = -2x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 - 3y^2) = -6y.
\end{aligned}$$

2. Найти $d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Решение

Находим первый дифференциал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Второй дифференциал:

$$d^2 z = \frac{2(xy \cdot dx^2 + (y^2 - x^2) dx dy - xy dy^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Задания для решения в аудитории.

1) Найти частные производные второго порядка:

1. $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$

2. $z = y \ln x$

3. $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

2) Найти дифференциалы второго порядка:

1. $z = x^2 y^2$

2. $z = \cos(x + 2y^2)$

3) Найти полный дифференциал функции $z(x,y)$ заданной уравнением $z^3 - 3xyz = a^3$

3.6 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $P_0(x_0; y_0; z_0)$ - фиксированная точка поверхности, заданной функцией $z = f(x, y)$ или уравнением $F(x, y, z) = 0$. Касательной плоскостью к поверхности в точке P_0 называется плоскость t , проходящая через точку P_0 и такая, что угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку P_0 и любую точку поверхности, стремится к нулю, когда точка P стремится к P_0 . Нормалью называется прямая n , проходящая через P_0 перпендикулярно касательной плоскости.

Нормальный вектор касательной плоскости t и направляющий вектор прямой n совпадают.

Если уравнение поверхности задано функцией $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0;$$

уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Решение типовых примеров

1. Дана поверхность $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности в точке $M(1, 1, 1)$.

Решение

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

и их значения в точке $M(1, 1, 1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \bigg|_M = -1; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \bigg|_M = 2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1), \text{ или } x - 2y + z = 0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{(x-1)}{-1} = \frac{(y-1)}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Задания для решения в аудитории.

1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+3y^2$ в точке M для которой $x=1$ $y=1$.

2. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(1,1,3)$.

$$z = 1 + x^2 + y^2$$

3.7 Экстремум функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D .

Функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный максимум (минимум) в точке $M(x_0, y_0)$, если неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$) имеет место во всех точках $M(x, y) \neq M_0$.

Необходимые условия экстремума:

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка равны нулю, то есть

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Точка $(x_0; y_0)$ называется стационарной точкой функции $f(x, y)$, если $df(x_0, y_0) = 0$. Пусть $(x_0; y_0)$ - стационарная точка функции $f(x, y)$, обозначим $A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$.

Достаточные условия экстремума:

Если $AC - B^2 > 0$, и $A < 0$, то $(x_0; y_0)$ - точка максимума.

Если $AC - B^2 > 0$, и $A > 0$, то $(x_0; y_0)$ - точка минимума.

Если $AC - B^2 < 0$, то $(x_0; y_0)$ - не является точкой экстремума.

Если $AC - B^2 = 0$, то точка $(x_0; y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, требуется дополнительное исследование.

Решение типовых примеров

1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6.$$

Решение

Область определения функции $D(f)$ - плоскость Oxy , $f(x, y)$ - дифференцируема в каждой точке $M(x; y) \in D(f)$.

Определим стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8xy + 24y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x + 3) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

$$y = 0; x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = -2,$$

$$x = -3, y = 2.$$

Получили три стационарные точки: $M_1(-4, 0)$, $M_2(-2, 0)$, $M_3(-3, 2)$.

Эти точки исследуем на достаточность условий экстремума:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x + 24, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Для каждой точки вычислим соответствующие A, B, C .

$M_1(-4; 0)$: $A_1 = 0$, $B_1 = -32 + 24 = -8$, $C_1 = 2$, $A_1C_1 - B_1^2 = -64 < 0$, то есть $M_1(-4; 0)$ не является точкой экстремума.

$M_2(-2; 0)$: $A_2 = 0$, $B_2 = -16 + 24 = 8$, $C_2 = 2$, $A_2C_2 - B_2^2 = -64 < 0$, то есть $M_2(-2; 0)$ не является точкой экстремума.

$M_3(-3; 2)$: $A_3 = 16$, $B_3 = 0$, $C_3 = 2$, $A_3C_3 - B_3^2 = 32 > 0$ при этом $A > 0$.

Вывод: $M_3(-3; 2)$ точка локального минимума функции $f(x, y)$, $f(-3; 2) = -10$.

Задания для решения в аудитории.

Исследовать на экстремум функции:

1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

2. $z = x^3 + y^3 - 9xy$

$$3. \quad z = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2xy - 5x - y + 2$$

3.8 Производная по направлению. Градиент функции

Производной функции $u(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{\ell}$ называется предел отношения приращения этой функции в направлении вектора $\vec{\ell}$ к $\Delta \ell$ при $\Delta \ell \rightarrow 0$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial \ell}$.

Итак, по определению производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{\substack{\Delta \ell \rightarrow 0 \\ (M \rightarrow M_0)}} \frac{\Delta_{\vec{\ell}} u}{\Delta \ell}$.

Введем формулу для вычисления производной по направлению.

По условию функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема. Следовательно, ее полное приращение в точке M_0 можно представить в виде

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + w(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \Delta \ell, \quad \text{где } w \rightarrow 0 \text{ при } \Delta \ell \rightarrow 0.$$

Производной по направлению вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Если $\vec{\ell} = \{X, Y, Z\}$, то направляющие косинусы определяются по формулам

$$\cos \alpha = \frac{X}{|\bar{\ell}|}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{|\bar{\ell}|}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{|\bar{\ell}|} \quad (5)$$

Замечание 1. Если направление $\bar{\ell}$ совпадает с положительными направлениями одной из осей координат (с одним из ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$), то производная по этому направлению совпадает с соответствующей частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Замечание 2. Если производная функции u в точке M_0 по направлению $\bar{\ell}$ положительная, то функция u в этом направлении возрастает, если же $\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} < 0$, то функция в направлении $\bar{\ell}$ убывает, а если $\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = 0$, то возможен экстремум.

С производной по направлению связан вектор, называемый *градиентом*.

Градиентом функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется *вектор, направление* которого совпадает с направлением нормали \bar{n} к поверхности уровня $u(x, y, z) = C$, проходящей через данную точку M , а *величина* равна производной по этой нормали.

Градиент скалярного поля, или градиент функции $u = u(x, y, z)$, обозначается так:

$$\text{grad } u(M) = \text{grad } u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Градиент указывает направление и величину его максимального роста в точке M .

$$|\text{grad } u(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2}$$

Для упрощения решения прикладных задач укажем некоторые свойства градиента справедливость которых легко доказать.

Свойство 1. Если $u(M) = C = \text{const}$, то $\text{grad } u(M) = 0$.

Свойство 2. $\text{grad}(Cu) = C \text{grad } u$, где $C = \text{const}$.

Свойство 3. $\text{grad}[u(M) \cdot v(M)] = v \text{grad } u(M) + u \text{grad } v(M)$.

Свойство 4. $\text{grad}[u(M) \pm v(M)] = \text{grad } u(M) \pm \text{grad } v(M)$.

Свойство 5. $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{grad } u - u \text{grad } v}{v^2}$.

Решение типовых примеров

1. Найти производную функции $u = x^2 - 2xyz + y^2$ в точке $M_1(1; 2; -1)$ по направлению от точки M_1 к точке $M_2(2; 4; -3)$.

Решение.

$$1) \overline{M_1 M_2}(1; 2; -2) \Rightarrow \bar{\ell} = \overline{M_1 M_2} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k};$$

$$2) \left| \overline{M_1 M_2} \right| = \sqrt{1+4+4} = 3;$$

$$3) \cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = -\frac{2}{3} \quad (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1);$$

$$4) \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2yz \Rightarrow \frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) = 6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2xz \Rightarrow \frac{\partial u(M_1)}{\partial y} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2xy \Rightarrow \frac{\partial u(M_1)}{\partial z} = -2 \cdot 1 \cdot 2 = -4;$$

$$5) \frac{\partial u}{\partial \ell} = 6 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} + (-4) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{26}{3} > 0.$$

2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $u(M) = x^y - z$ в точке $M_0(2;2;4)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = y \cdot x^{y-1} \Big|_{M_0} = 4; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M) = x^y \cdot \ln x \Big|_{M_0} = 4 \ln 2; \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M) = -1$$

$$\overline{grad} u(M_0) = 4\bar{i} + 4 \ln 2 \bar{j} - \bar{k}$$

Наибольшая скорость возрастания поля

$$\max \frac{\partial u}{\partial \ell} = \left| \overline{grad} u(M_0) \right| = \sqrt{16 + 12 \ln^2 2 + 1} = \sqrt{17 + 12 \ln^2 2}.$$

Задания для решения в аудитории.

1. Найти производную функции $u(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точке $M_0(0;0;0)$ по направлению, идущему от этой точки к точке $M(3;4;0)$.

2. Найти скорость изменения функции $u(M) = xyz$ в точке $M_0(5;1;-8)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B_0(9;4;4)$.

3. Найти градиент функции $u(M) = 3x^2y + y^2 - 3xy^3 + y^4$ в точке $M_0(1;2;0)$ и его направление.

4. Найти величину и направление градиента функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \quad \text{в точке} \quad M(1; -1; 2).$$

Определить, в каких точках градиент перпендикулярен к оси Ox , в каких точках равен нулю.

3.9 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

3.9.1 Геометрическое представление, модуль и аргумент комплексного числа.

Комплексным числом z называется выражение

$$z = a + ib,$$

где a и b - **действительные** числа,

i - **мнимая единица**, определяемая равенством $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$;

a называется **действительной** или **вещественной** частью, b - **мнимой** частью числа z . Их обозначают так:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

При $a = 0$, $z = 0 + ib = ib$ - чисто мнимое число;

$b = 0$, $z = a + i0 = a$ - действительное число.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **сопряжёнными**. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются **равными** $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексное число z **равно нулю**:

$$z = a + ib = 0$$

тогда и только тогда, когда $a=0$, $b=0$.

Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости Oxy в

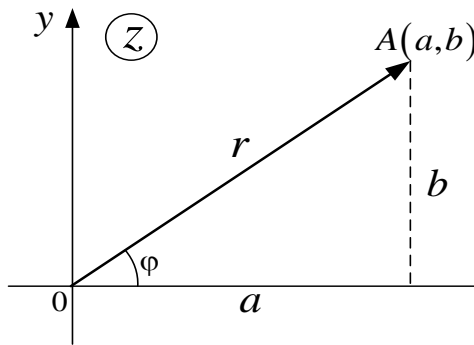


Рисунок 4.1

виде точки $A(a,b)$ (рисунок 4.1) с координатами a и b . Плоскость на которой изображаются комплексные числа, называется **плоскостью комплексного переменного z** (на плоскости ставить символ (z)). Ось Oy называют мнимой осью, а ось Ox действительной осью.

Соединив точку $A(a,b)$ с началом координат, получим вектор \overline{OA} . В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z = a + ib$ вектор \overline{OA} .

Модулем комплексного числа $|z|$ называется длина радиус-вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначают буквой r .

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (рисунок 4.1).}$$

Аргументом комплексного числа называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором \vec{r} , причем величина угла считается положительной, если отсчет ведётся против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет ведётся по часовой стрелке.

$$\text{Обозначают: } \varphi = \text{Arg } z, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a} \text{ (рисунок 4.1).}$$

Аргумент, в отличие от модуля определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k - любое целое число. $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ - главное значение аргумента, заключённое в промежутке $(-\pi; \pi]$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$)

3.9.2 Арифметические действия над комплексными числами

Пусть даны два комплексных числа: $z_1 = a_1 + ib_1$ $z_2 = a_2 + ib_2$

Правило сложения и вычитания комплексных чисел:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Вычитание комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению, и выполняется по формуле:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

Правило умножения комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = \\ a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 - b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Замечание: при умножении комплексных чисел необходимо учитывать, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i$ и так далее и вообще при любом целом k : $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

Деление комплексного числа на комплексное число определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле

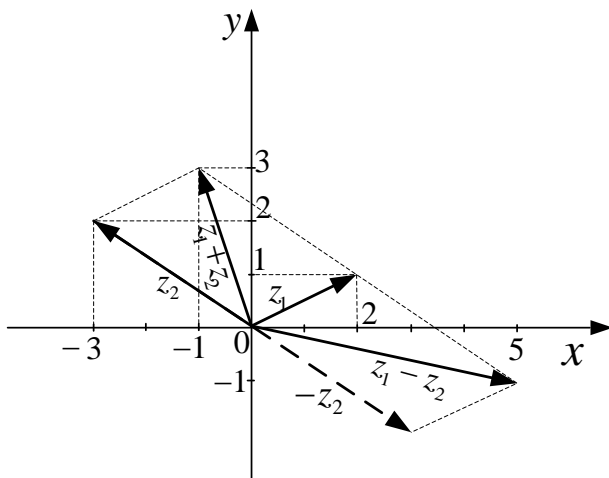
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ia_2b_1 - i^2b_1b_2}{a_2^2 - i^2b_2^2} = \\ = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}, \text{ при } |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0.$$

Решение типовых примеров

1. $z_1 = 2 + i$ $z_2 = -3 + 2i$

Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ (геометрически и алгебраически), $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^2 .

Решение



$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (-3 + 2i) = -1 + 3i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (-3 + 2i) = 5 - i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(-3 + 2i) = -6 + 4i - 3i + 2i^2 = -6 + i - 2 = -8 + i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{-3 + 2i} = \frac{(2 + i)(-3 - 2i)}{(-3 - 2i)(-3 - 2i)} = \frac{-6 - 4i - 3i - 2i^2}{(-3)^2 + (2)^2} = \frac{-4 - 7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i,$$

$$z_1^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i.$$

2. Решить уравнение $x^2 + 2x + 9 = 0$.

Решение

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 36 = -32 = 32i^2, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{32i^2}}{2} = \frac{-2 + 4\sqrt{2}i}{2} = -1 + 2\sqrt{2}i,$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{32i^2}}{2} = \frac{-2 - 4\sqrt{2}i}{2} = -1 - 2\sqrt{2}i.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -1 + 2\sqrt{2}i, \quad x_2 = -1 - 2\sqrt{2}i.$$

Задания для решения в аудитории.

1. Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа.

Найти их модуль и аргумент $2; 3+2i; i; -2i; -3-2i$

2. Построить и вычислить сумму и разность чисел $Z_1 = 2+3i, Z_2 = 5+4i$

3. Найти произведение чисел:

а) $(5+i)(5-i)$

б) $(1+2i)(5-i)$

в) $(1-i)(1-i)$

г) $(2-i)^2$

4. Найти частное:

а) $\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$

б) $\frac{2t}{1-t}$

в) $\frac{1+t}{t}$

5. Вычислить:

а) $\frac{(1+t)(1-2t)}{3+t}$

б) $(1+2t)t - \frac{3+2t}{1-t}$

в) $t + \frac{6t+7}{1-7t}$

г) $\frac{(1+2t)^2 - (1-t)^3}{(3+2t)^3 - (2+t)^2}$

6. Найти мнимую часть комплексного числа $Z=(8-i^3)(2+11i)$

7. Найти действительную часть комплексного числа $Z = i^4 + \frac{2+i}{3i}$

8. Решить уравнения и проверить подстановкой корней в уравнение.

а) $x^2+25=$

б) $x^2-2x+5=0$

3.9.3 Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $z = a + ib$ называется *алгебраической* формой записи. Помимо алгебраической формы используются и другие формы записи комплексного числа:

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ - *тригонометрическая форма* записи комплексного числа.

Приведем *примеры* обращения комплексных чисел из алгебраической формы в тригонометрическую:

Для числа i имеем $r = 1$, $\varphi = 90^\circ$, поэтому $i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$.

Для числа -1 имеем $r = 1$, $\varphi = 180^\circ$, поэтому $-1 = 1(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
или $-1 = 1(\cos \Pi + i \sin \Pi)$

Для числа $1 + i$ имеем $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\varphi = 45^\circ$ $1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\Pi}{4} + i \sin \frac{\Pi}{4}\right)$

Для числа $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, имеем $r = 1$, $\varphi = 45^\circ$, поэтому
 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$.

Для числа $-1 + \sqrt{3}i$ имеем $r = 2$, $\varphi = 120^\circ$, поэтому
 $-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$.

$z = re^{i\varphi}$ - **показательная форма** записи комплексного числа.

Так, например, число $1 + i$ может быть записано так:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4}, \quad z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Если комплексные числа даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Эта формула называется **формулой Муавра**.

$$\sqrt[n]{z^n} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Если комплексные числа даны в показательной форме $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

- **формула Эйлера**

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Решение типовых примеров

1. $z = 1 + i$, найти z^8 и $\sqrt[3]{z}$

Решение

Перейдём к тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, тогда по формуле Муавра

$$z^8 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos 8 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 8 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \\ = 2^4 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16(1 + i \cdot 0) = 16.$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right).$$

при $k = 0$ $\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$

при $k = 1$ $\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) =$

$$= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

при $k = 2$ $\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$

2. Вычислить все значения $\sqrt[3]{1}$;

Решение:

Имеем $r = 1$ $\varphi = 0$. По формуле, получим:

$$\sqrt[3]{1} = 1 \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} \right)$$

при $k=0$ $\sqrt[3]{1} = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$

при $k=1$ $\sqrt[3]{1} = 1 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

при $k=2$ $\sqrt[3]{1} = 1 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Итак $\sqrt[3]{1}$ имеет три различных значения: $1; -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Особое значение в электротехнике имеет умножение комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ на мнимую единицу:

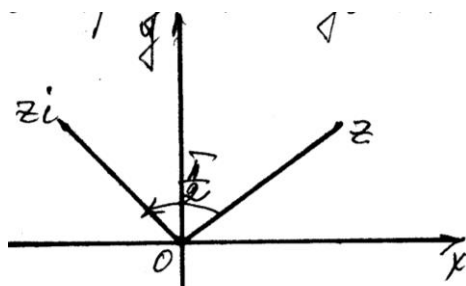
$$i = 0 + 1i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Найдем модуль и аргумент числа zi :

$$|zi| = r1 = r \quad \arg zi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Поэтому } zi = r \left(\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

При умножении комплексного числа на мнимую единицу его модуль не



изменяется, а аргумент увеличивается на $\frac{\pi}{2}$.

Этому (в геометрическом смысле) соответствует поворот отрезка Oz - без изменения его длины против часовой стрелки на 90° .

Задания для решения в аудитории.

1. Представить в тригонометрической форме $z = -2 - 2i\sqrt{3}$

2. Выразить в показательной форме $z = -\sqrt{3} - i$

3. Найти произведение

$$a) z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{и} \quad z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$б) 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot i$$

$$в) z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} \quad z_2 = 5e^{\frac{\pi}{3}i}$$

4. Найти частное

$$a) z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad u \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$б) z_1 = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \quad u \quad z_2 = -5$$

$$в) z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра

$$a) \left[2 \left(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ \right) \right]^5$$

$$б) (1+i)^{30}$$

6. Вычислить :

$$a) \sqrt[4]{-1}$$

б) $\sqrt[3]{i}$

ГЛАВА 4 РЯДЫ

4.1 Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ бесконечная числовая последовательность.

Выражение вида $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ (1) называется числовым рядом (или просто рядом), а числа u_1, u_2, u_3, \dots называются членами ряда; u_n при произвольном n называется общим членом ряда (иногда первый член ряда обозначают u_0 , второй — u_1 и т. д., то есть придают n значения $0, 1, 2, \dots$). Ряд

часто записывают $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Числовой ряд задан, если известен его общий член u_n , или известен закон, по которому он может быть получен.

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют **частичной суммой** ряда :

$$S_1 = u_1; \quad S_2 = u_1 + u_2; \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3; \quad \dots; \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (2)$$

Определение Ряд (9.1) называется сходящимся, если n -я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, где S называется суммой ряда (1).

Если же n -я частичная сумма ряда при $n \rightarrow \infty$ не стремится к конечному пределу или вообще не имеет никакого предела, то ряд называется расходящимся.

Ряд $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ (3) называется геометрической прогрессией, a - первый член ряда; q – знаменатель прогрессии, сумма ряда $S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$.

При $|q| < 1$ ряд (9.3) сходится, его сумма равна $S = \frac{a}{1 - q}$ и при $|q| \geq 1$ ряд (3) расходится.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ (4) называется гармоническим рядом, он расходится.

Ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ (5) называется обобщенным гармоническим рядом, при $p > 1$ этот ряд сходится, а при $p \leq 1$ он расходится.

Необходимое условие сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (6)

Если общий член ряда u_n не стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости рядов

1. Признаки сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (*)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (**)$$

1) Если члены ряда (*) не превосходят соответствующих членов ряда (**), т. е. $u_n \leq v_n$ и ряд (**) сходится, то сходится и ряд (*).

2) Если члены ряда (*) не меньше соответствующих членов ряда (**), т. е. $u_n \geq v_n$ и ряд (**) расходится, то расходится и ряд (*).

Этот признак остаётся в силе, если неравенства $u_n < v_n$ ($u_n > v_n$) выполняются не при всех n , а лишь начиная с некоторого номера $n = N$.

2. Предельный признак сравнения

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ ($0 < A < \infty$), то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и расходятся одновременно.

3. Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то если $l < 1$ ряд сходится, если же $l > 1$, то ряд расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться. В этом случае признак Даламбера ответа не дает, приходится исследовать на сходимость ряд с помощью других признаков.

4. Признак Коши (Радикальный признак)

Если для знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то если $l < 1$, то ряд сходится, если $l > 1$, то ряд расходится.

Если $l = 1$, то радикальный признак ответа не дает.

5. Признак Коши (Интегральный признак).

Пусть члены знакоположительного ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$ и $f(x)$ такая непрерывная невозрастающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция, что $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots$

Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то и ряд сходится, а если он расходится, то и ряд расходится.

Решение типовых примеров

Пример 1. Дан общий член ряда $u_n = \frac{2n-1}{3^n}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение. Если $n=1$, то $u_1 = \frac{1}{3}$; если $n=2$, то $u_2 = \frac{3}{9}$; если $n=3$, то $u_3 = \frac{5}{27}$; если $n=4$, то $u_4 = \frac{7}{81}$; Ряд можно записать в виде $\frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{5}{27} + \frac{7}{81} + \dots$

Пример 2. Найти общий член ряда $\frac{4}{2} + \frac{16}{4} + \frac{64}{6} + \frac{256}{8} + \dots$

Решение. Числители образуют геометрическую прогрессию $4, 4^2, 4^3, 4^4, \dots$; n -й член этой прогрессии $b_n = 4^n$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию $2, 4, 6, 8, \dots$; n -й член этой прогрессии находим по формуле

$a_n = a_1 + d(n-1)$, где $a_1 = 2$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n$. Следовательно, общий член этого ряда $u_n = \frac{4^n}{2n}$.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$.

Решение. Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 5n + 6} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}$$

Умножая обе части этого выражения на знаменатель, придём к тождеству $1 \equiv A(n+3) + B(n+2)$.

Полагая $n = -2$, находим $1 = A$; значит $A = 1$;
 $n = -3$, находим $1 = -B$; значит $B = -1$.

Таким образом, $u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$, т.е. $u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$.

Отсюда $u_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; $u_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$; $u_4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$;

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}.$$

Так как $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3}$, то ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{3}$.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}$.

Решение. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (то есть с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, так как $q = \frac{1}{3} < 1$), этот ряд сходится.

Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, следовательно, данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$.

Решение. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ($q = \frac{1}{2} < 1$, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия). Применим предельный признак сравнения рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4 \cdot 2^n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 - \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \dots$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (расходится).

Воспользуемся предельным признаком сравнения $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$.

Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \frac{2^4}{4^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots$

Решение. Применим признак Даламбера: имеем $u_n = \frac{2^n}{n^{10}}$, $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$.

$$\text{Тогда } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^{10}}{(n+1)^{10} \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^{10}}{(n+1)^{10}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}} = 2.$$

Так как $l > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$.

Решение. Здесь удобнее применить радикальный признак Коши, поскольку

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n.$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3}, \text{ так как } l < 1, \text{ то данный ряд}$$

сходится.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$.

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд.

Задания для решения в аудитории

1. Записать 4-5 первых членов ряда, по известному общему члену U_n , если:

а) $U_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$

б) $U_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

2. Написать простейшую формулу n – го члена ряда по указанным членам:

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

в) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$

г) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$

3. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости рядов:

а) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2n}{2n+1} + \dots$

б) $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} + \dots$

4. Найти сумму n – первых членов ряда (S_n) , доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и найти сумму ряда S :

$$a) \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$б) \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$$

5. Исследовать на сходимость по признаку сравнения:

$$a) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \dots;$$

$$б) \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots;$$

6. Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера:

$$a) 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots;$$

$$б) \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots;$$

7. Исследовать на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

8. Исследовать на сходимость, используя интегральный признак Коши:

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$\text{б) } 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

4.2 Знакопередающие ряды

Определение Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакопередающим.

Знакопередающий ряд имеет вид

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots, \quad (7)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для знакопередающего ряда имеет место достаточный признак сходимости, который называют признаком Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакопередающемся ряде (7) абсолютные величины членов ряда убывают $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n| > \dots$ и общий член ряда u_n стремится к 0 при неограниченном увеличении его номера, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$, то ряд (7) сходится, его сумма положительная и не превосходит первого члена ряда ($0 < S < u_1$).

Замечание. Если хотя бы одно условие признака Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

Если знакопередающий ряд удовлетворяет условию признака Лейбница, то можно оценить ошибку, которая получится, если заменить его сумму S частичной суммой S_n . Допускаемая при этом погрешность, оценивается для знакопередающего ряда по признаку Лейбница.

При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1} . Но отбрасываемые члены образуют знакопередающий ряд, сумма которого меньше первого члена этого ряда, т. е. меньше u_{n+1} .

Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n , равна $\delta = |r_n| = |S - S_n|$ и не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, т. е. $|r_n| < u_{n+1}$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

Вычислить приближенно его сумму, удержав три первых члена ряда, и оценить погрешность.

Решение. Проверим выполнимость условий признака Лейбница, т.к.

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$1) \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0.$$

Оба условия выполняются. Следовательно, данный ряд сходится

$$S \approx S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = 0,2014.$$

Ошибка δ , получающаяся при замене суммы этого ряда суммой трёх первых членов, меньше абсолютной величины четвертого члена, то есть:

$$\delta < |u_4|, \quad \delta < \frac{1}{25} = 0,04.$$

Ответ: $S = 0,2014$, $\delta < 0,04$.

Пример 2. Вычислить сумму ряда с точностью до 0,01

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}.$$

Решение. Данный ряд сходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n^2} = 0$,

Так как $|r_n| < u_{n+1} < 0,01$, то найдём n

$$\left| \frac{1}{3(n+1)^2} \right| < 0,01, \quad 3(n+1)^2 > 100,$$

$$\sqrt{3}(n+1) > 10, \quad n+1 > \frac{10}{\sqrt{3}},$$

$$n > 5,7 - 1, \quad n > 4,7.$$

Следовательно, $n = 5$.

Значит, это неравенство выполняется, начиная с $n = 5$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} S \approx S_5 &= \frac{1}{3 \cdot 1^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} = \\ &= 0,333 - 0,083 + 0,037 - 0,021 + 0,013 = 0,279. \end{aligned}$$

Ответ: $S = 0,28$.

Задания для решения в аудитории

1. а) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{1}{i} + \dots$$

суммой четырех первых его членов. Найти эту сумму.

б) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$0,1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{3} - \frac{0,1^4}{4} + \dots$$

суммой трех первых его членов. Найти эту сумму.

2. Вычислить сумму ряда с точностью до ε :

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}, \quad \varepsilon = 0,001$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}, \quad \varepsilon = 0,01$

4.3 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Определение Ряды, члены которых имеют произвольные знаки, называются знакопеременными рядами.

Пусть $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ (8) знакопеременный ряд.

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов ряда произвольное.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если для знакопеременного ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$.

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда **всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся**.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ называется **условно сходящимся** (или не абсолютно сходящимся), если он сходится, а ряд $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$, составленный из абсолютных величин его членов расходится.

Решение типовых примеров

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная)

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Решение. Ряд знакопередающийся, поэтому применим признак Лейбница.

1) $1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} > \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} > \dots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = 0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} + \dots$$

Этот ряд обобщённо гармонический и при $p = \frac{5}{4} > 1$ является сходящимся. Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$.

Решение. Применим признак Лейбница.

1) $\frac{1}{11} > \frac{1}{21} > \frac{1}{31} > \frac{1}{41} > \dots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10n+1} = 0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд

сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{10n+1} + \dots$$

Исследуем этот ряд с помощью интегрального признака Коши:

$$f(x) = \frac{1}{10x+1},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{10x+1} = \frac{1}{10} \int_1^{\infty} \frac{d(10x+1)}{10x+1} = \frac{1}{10} \ln(10x+1) \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.

Значит, данный ряд сходится условно.

Пример 3. $1,1 - 1,01 + 1,001 - \dots + (-1)^{n-1} [1 + (0,1)^n] + \dots$

Решение. Применим признак Лейбница.

1) $1,1 > 1,01 > 1,001 > \dots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{10^n}) = 1$ второе условие признака не выполняется. Значит, ряд

расходится.

Задания для решения в аудитории

1. Выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие сходятся условно, какие расходятся.

а) $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} + \dots$

$$б) -\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{10^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(3n+1)^2} + \dots$$

4.4 Функциональные ряды

Определение. Ряд, членами которого являются функции от x , называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (9)$$

Совокупность тех значений x , при которых функциональный ряд сходится, называется **областью сходимости** этого ряда. Областью сходимости функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси Ox .

Частичная сумма функционального ряда, т. е. сумма первых n его членов, является функцией переменной x :

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \quad (10)$$

В любой точке x из области сходимости функционального ряда (9) существует предел частичной суммы (9.10) при $n \rightarrow \infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости функционального ряда частичная сумма $S_n(x)$ не имеет предела. Сумма функционального ряда является некоторой функцией от x , определенной в области сходимости ряда:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad \forall x \in D \quad (11)$$

Разность $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ называется остатком функционального ряда.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области D , к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N , что для всех $n > N$ и для всех $x \in D$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |R_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости).

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует сходящийся

знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, удовлетворяющий условию:

$$|u_n(x)| \leq C_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a, b]$ равномерно.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти область сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

Решение. По радикальному признаку Коши имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left| \frac{e}{x} \right|.$$

Ряд будет сходиться при $\left| \frac{e}{x} \right| < 1$, следовательно, $\frac{e^2}{x^2} - 1 < 0$, $\frac{e^2 - x^2}{x^2} < 0$, так

как $x^2 > 0$, то $e^2 - x^2 < 0$. Ряд сходится при $x \in (-\infty; -e) \cup (e; +\infty)$.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость:

$$\sin x + \frac{1}{2^2} \sin^2 2x + \frac{1}{3^2} \sin^3 3x + \dots + \frac{1}{n^2} \sin^n nx + \dots$$

Решение. Область определения $(-\infty; +\infty)$. Сравним данный ряд с числовым

знакоположительным рядом $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ - это обобщённо гармонический ряд, при $p = 2 > 1$ он сходится.

Так как $\left| \frac{\sin^n nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, то по признаку Вейерштрасса данный ряд

равномерно сходится на всей оси Ox .

Задания для решения в аудитории

1. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$$

4.5 Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (12)$$

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ называются коэффициентами степенного ряда, $x \in R$. Ряд (9.12) разложен по степеням x . Рассматриваются также степенные ряды, разложенные по степеням $(x - x_0)$, то есть ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots, \quad (13)$$

где x_0 - некоторое постоянное число.

Ряд (13) легко приводится к виду (12), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (12).

Основное свойство степенных рядов:

Теорема Абеля. Если степенной ряд (12) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если ряд (12) расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости степенного ряда и называется **интервалом сходимости степенного** ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют **радиусом сходимости** степенного ряда, то есть $R > 0$ - это такое число, что при всех x , для которых $|x| < R$, ряд (12) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

В частности, когда ряд (12) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (12) сходится во всех точках числовой оси $(-\infty; +\infty)$, то в этом случае $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (то есть при $x = -R$ и при $x = +R$) сходимость ряда проверяется отдельно.

Радиус сходимости степенного ряда (12) находим по формулам:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (14)$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (15)$$

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (9.12) можно использовать непосредственно признак Даламбера, в редких случаях признак Коши, для ряда составленного из абсолютных величин членов исходного ряда.

Замечания.

1. Интервал сходимости степенного ряда (9.13) находят из неравенства $|x - x_0| < R$ и он имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

2. Если степенной ряд содержит не все степени x , т.е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяют признак Даламбера (или признак Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Свойства степенных рядов

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (9.12) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R; R)$.

2. Если радиус сходимости ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз внутри интервала сходимости. При этом интервал сходимости не изменяется.

3. Внутри интервала сходимости ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить, умножать на число. Интервал сходимости должен быть одинаковым.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 3^n}{n!}$.

Решение. Воспользуемся формулой (14):

$$a_n = \frac{3^n}{n!}$$
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится на всей числовой оси.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Решение. Заданный ряд не полный. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$|u_n| = \left| \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right|, \quad |u_{n+1}| = \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|,$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = |x^2| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$, $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$, сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, тоже сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости является отрезок $[-1; 1]$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^{n-1}}$.

Решение. Находим радиус сходимости ряда по формуле (14):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} : \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{n \cdot 3^{n-1}} = 3.$$

Следовательно, ряд сходится при $-3 < x - 3 < 3$, то есть при $0 < x < 6$.

При $x = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница.

При $x = 6$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд – расходится.

Следовательно, областью сходимости является интервал $[0; 6)$.

Задания для решения в аудитории

1. Найти область сходимости степенных рядов

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^n$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.6 Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Если функцию $f(x)$ - любая функция, имеющая в некоторой окрестности точки x_0 производные $(n+1)$ -го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $c \in (x; x_0)$ - остаточный член в форме Лагранжа.

Если для некоторого значения x $R_n(x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то в пределе формула Тейлора преобразуется для этого значения x в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (17)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (18)$$

Этот ряд называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

Достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0 , при любом n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| < M$, где M - положительная постоянная, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ и функция разложима в ряд Тейлора.

Некоторые примеры разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty); \quad (19)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty); \quad (20)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty); \quad (21)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1; 1]; \quad (22)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad x \in [-1; 1]; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \arcsin x = & x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \\ & + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in [-1; 1]; \end{aligned} \quad (24)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$x \in \left\{ \begin{aligned} & [-1; 1], m \geq 0 \\ & (-1; 1], -1 < m < 0 \\ & (-1; 1), m \leq -1 \end{aligned} \right\}; \quad (25)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad x \in (-1; 1). \quad (26)$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = 2^x$.

Решение. Найдём значения функции и её производных при $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= 2^x \ln 2, & f'(0) &= \ln 2, \\ f''(x) &= 2^x \ln^2 2, & f''(0) &= \ln^2 2, \\ &\dots\dots\dots, \\ f^{(n)}(x) &= 2^x \ln^n 2, & f^{(n)}(0) &= \ln^n 2, \end{aligned}$$

Так как $0 < \ln 2 < 1$, то при фиксированном x имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ для любого n . Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Маклорена:

$$2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 2}{3!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty)$$

Это решение можно получить иначе: достаточно в разложении:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

заменить x на $x \ln 2$, так как $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2}$.

Пример 2. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

Решение. Воспользуемся формулой (26). Так как

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то заменив x на $\frac{x}{3}$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3-x} &= \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots \right), \text{ или} \\ \frac{2}{3-x} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^n}{3^n} + \dots, \end{aligned}$$

где $-1 < \frac{x}{3} < 1$, то есть $-3 < x < 3$.

Пример 3. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, поэтому достаточно разложить в ряд функцию $\cos 2x$, заменив в формуле (9.21) x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Это разложение справедливо, как и в случае $\cos x$, для всех x .

В итоге получим:

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots\end{aligned}$$

Пример 4. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = e^{-x} \sin x$.

Решение. Ряд для функции e^{-x} получается из ряда для функции e^x заменой x на $-x$ и абсолютно сходится на всей числовой прямой. Ряд для функции $\sin x$ также абсолютно сходится на всей числовой прямой. Поэтому, чтобы получить разложение функции $f(x) = e^{-x} \sin x$ в ряд, достаточно перемножить абсолютно сходящиеся ряды для функций e^{-x} и $\sin x$.

$$e^{-x} \sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \dots$$

Полученный ряд, по свойству сходящихся рядов, сходится на всей числовой прямой к функции $f(x) = e^{-x} \sin x$.

Задания для решения в аудитории

1. Разложить функцию ряд Тейлора, взяв три члена разложения:

а) $f(x) = \sin x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2} \right)$.

б) $f(x) = \ln(1 - x - 6x^2)$ по степеням x .

в) $f(x) = 2x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - x$ по степеням x .

2. Разложить функцию $y = \ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$ (при $x_0=1$).

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^4$.

4. Разложить функцию $y = \sin \frac{x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$.

4.7 Некоторые приложения степенных рядов

4.7.1 Вычисление значений функций

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью. Предположим, что эту функцию можно разложить в степенной ряд: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$ на интервале $(-R; R)$ и $x_1 \in (-R; R)$.

Тогда $f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + \dots + a_n(x_1 - x_0)^n + \dots$. Взяв достаточное число первых членов ряда, получим

$$f(x_1) = S_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + \dots + a_n(x_1 - x_0)^n$$

Абсолютная погрешность этого приближенного равенства, то есть $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ равно модулю остатка ряда $\Delta = |f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)|$, где $r_n(x_1) = a_{n+1}(x_1 - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x_1 - x_0)^{n+2} + \dots$. Чтобы вычислить значение $f(x_1)$ с точностью $\varepsilon > 0$, нужно взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы $|f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)| \leq \varepsilon$.

Оценить погрешность можно с помощью остаточного члена ряда Тейлора. Если функция $f(x)$ разложена в степенной ряд, то этот ряд является ее рядом Тейлора (или Маклорена). В этом случае

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x_1 - x_0)^{n+1} \right|,$$

где $c = x_0 + \theta(x_1 - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

В зависимости от конкретного случая применяется тот или иной метод оценки остатка ряда (или оценки погрешности).

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,001 число e

Решение. Запишем ряд Маклорена для e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

При $x = 1$ получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Запишем приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена ряда Маклорена.

Так как $f^{(n+1)}(x) = e^x$, то $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$, где $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

При $x=1$ $R_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Учитывая, что $e^\theta < e < 3$, получим $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$.

При $n=5$ $\frac{3}{(5+1)!} = \frac{1}{240} > 0.001$.

При $n=6$ $\frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < 0.001$.

Поэтому для достижения требуемой точности достаточно взять $n=6$.

Итак, $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} =$
 $= 1.0000 + 1.0000 + 0.5000 + 0.1667 + 0.0417 + 0.0083 + 0.0014 = 2.7181$.
 Следовательно, $e \approx 2.7181$ с точностью до 0,001.

Пример 2. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение. $\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \dots$

Полученный ряд знакочередующийся, члены которого убывают по абсолютной величине. Поэтому его остаток не превосходит первого отброшенного члена ряда.

Так как $\frac{\pi^3}{3!10^3} > 0.0001$, а $\frac{\pi^5}{5!10^5} < 0.0001$, то с точностью до 0,0001 получим

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} = \frac{(3.14159)}{10} - \frac{(3.14159)^3}{3!10^3} = 0.314159 - 0.00517 = 0.30899.$$

Итак, $\sin 18^\circ \approx 0.3090$.

4.7.2 Вычисление определенных интегралов

Сущность метода поясним на конкретном примере

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, то положив $x = -x^2$, получим $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$ этот ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$ значит,

его можно почленно интегрировать на любом отрезке и, в частности, на отрезке $\left[0; \frac{1}{3}\right]$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx = x \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{x^5}{5 \cdot 2} \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^7}{7 \cdot 6} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \dots = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 3^7} + \dots\end{aligned}$$

Искомый интеграл представлен знакочередующимся рядом. Так как $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0.001$, то с точностью до 0,001 имеем

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} = 0.3333 - 0.0123 = 0.3210$$

Итак $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx 0.321$.

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить:

а) $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 10^{-4} ;

б) $\sqrt[4]{630}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$;

2. Ограничиваясь первыми тремя членами разложения вычислить

а) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$;

$$\text{б) } \int_0^{0.4} e^{-\frac{x^2}{4}} dx.$$

3. Вычислить:

$$\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-3};$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1
«Интегрирование функций»

Вариант 1

1. Вычислить интегралы

а) $\int (3x^2 + \frac{8}{x^5} + 11\sqrt[9]{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x}})dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+7}$;

г) $\int (x^2 + 5x + 6) \cdot \cos 2x dx$; д) $\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x^3 - 4x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$

3. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$ и $x = 0, x = 1, y = 0$.

Вариант 2

1. Вычислить интегралы

а) $\int (2x - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3\sqrt{x^2}} + 5\sqrt[4]{x})dx$; б) $\int \operatorname{tg}(2x+1)dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}-2}$;

г) $\int (x^2 - 4) \cdot e^{3x} dx$; д) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 6x - x^2$ и $y = 0$.

3. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x$; $x = 0$; $y = 4$.

Вариант 3

1. Вычислить интегралы

а) $\int (5x^4 - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 5\sqrt[3]{x^2})dx$; б) $\int \sin(5-3x)dx$; в) $\int \frac{dx}{5-\sqrt{x-2}}$;

г) $\int (3x+4) \cdot e^{3x} dx$; д) $\int \frac{x^5 - x^4 + 6x^3 + 13x - 6}{x^3 - x^2 - 6x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.

Вариант 4

1. Вычислить интегралы

а) $\int (3x^2 + \frac{5}{x^6} - \frac{6}{x^3\sqrt{x^2}} + 11\sqrt[6]{x^5})dx$; б) $\int e^{5x+3} dx$; в) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+5}$;

г) $\int (4-16x) \cdot \sin 4x dx$; д) $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить интегралы

а) $\int (5x^4 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3\sqrt{x}} + 9\sqrt[7]{x^2})dx$; б) $\int \cos(7x+1)dx$; в) $\int \frac{2dx}{4\sqrt{x+1}-3}$;

г) $\int (x^2 + 4x + 3) \cdot \cos x dx$; д) $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 1 - 2x$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 6

1. Вычислить интегралы

а) $\int (4x^3 - \frac{4}{x^5} + \frac{9}{x^4\sqrt{x}} + 10\sqrt[7]{x^3})dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-3)}$; в) $\int \frac{3dx}{6\sqrt{x+5}+1}$;

г) $\int (x^2 + 4x + 4) \cdot e^{3x} dx$; д) $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^3$ и $y = 2x$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

Вариант 7

1. Вычислить интегралы

а) $\int (7x^6 - \frac{3}{x^4} + 3\sqrt{x} - \frac{6}{x^2\sqrt{x}})dx$; б) $\int \operatorname{ctg}(7x+2)dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-7}-3}$;

г) $\int (2-9x)e^{-3x} dx$; д) $\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2 + 4$ и осью OY .

Вариант 8

1. Вычислить интегралы

а) $\int (6x^5 - \frac{1}{x^2} - 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^4\sqrt{x}})dx$; б) $\int 5^{2x+1}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+10}+5}$;

г) $\int \frac{2x^2+24x-10}{(x-3)(x-4)(x+2)}dx$; д) $\int (1-6x)e^{2x}dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $y = 2$.

Вариант 9

1. Вычислить интегралы

а) $\int (8x - \frac{5}{x^6} + 7\sqrt[6]{x} - \frac{5}{x^3\sqrt{x}})dx$; б) $\int (2x-7)^5dx$; в) $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x-5}}$

г) $\int (3x-2) \cdot \cos 5x dx$; д) $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = x$ и $x - y = 2$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Вариант 10

1. Вычислить интегралы

а) $\int (4x - \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^5\sqrt{x^3}} + 9\sqrt[7]{x^2})dx$; б) $\int \sqrt[4]{3x+1}dx$; в) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+2}+3}$;

г) $\int e^{-2x} \cdot (4x-3)dx$; д) $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x^3-3x^2+2x}dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4x - x^2$ и осью OX .

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$.

Вариант 11

1. Вычислить интегралы

а) $\int (8x^7 + \frac{7}{x^8} - \frac{1}{x^3\sqrt{x}} + 5\sqrt[4]{x})dx$; б) $\int \frac{dx}{3x+10}$; в) $\int \frac{2dx}{4\sqrt{x+3}-1}$;
г) $\int (x^2 - 3x + 2) \cdot e^{3x} dx$; д) $\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 12}{x^3 - 6x^2 + 8x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 - 2$ и $y = 4 + x$.

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$; $y = 3$; $x = 12$; $y = 0$.

Вариант 12

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(9x^8 - \frac{15}{x^4} + \frac{7}{x^4\sqrt{x}} + 13\sqrt[10]{x^3} \right) dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-2)^2}}$; в) $\int \frac{3dx}{6\sqrt{x+8}+5}$;
г) $\int (1 - 8x^2) \cdot e^{4x} dx$; д) $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = 1 - x$; $x = -3$ и осью OX .

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$; $x = -2$; $x = 0$; $y = 0$.

Вариант 13

1. Вычислить интегралы

а) $\int (11x^{10} - \frac{6}{x^7} + 9\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{x^4\sqrt{x}}) dx$; б) $\int \frac{dx}{(2x-5)^3}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+7}+2}$;
г) $\int (x^2 - 5x + 6) \cdot e^{3x} dx$; д) $\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 4$; $x = -2$; $x = 2$; $y = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{4} - 1$; $y = 0$.

Вариант 14

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(6x^5 + \frac{6}{x^3} - \frac{5}{2x\sqrt{x}} + 13\sqrt[8]{x^5} \right) dx$; б) $\int \sqrt[3]{(2x+7)} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+9}-11}$;

г) $\int (3x^2 + 5) \cdot e^{2x} dx$; д) $\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^3 + 4x^2 - 5x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$; $y + x = 5$; $x = 0$; $x = 1$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$; $y = 4$.

Вариант 15

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(6x^2 + 7\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{3x^3\sqrt{x}} + \frac{9}{x^4} \right) dx$; б) $\int 6^{2x+1} dx$; в) $\int \frac{dx}{7 - \sqrt{x-3}}$;

г) $\int (2x^2 + 4x + 7) \cdot e^{2x} dx$; д) $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 1$; $y = 3 - x$.

3. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.

Вариант 16

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(8x^3 + 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{x^5} - \frac{3}{4x^4\sqrt{x}} \right) dx$; б) $\int e^{3x-10} dx$; в) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-4}+9}$

г) $\int (x^2 - 3x + 2) e^x dx$; д) $\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 6x - x^2$; $y = 0$

3. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x$; $x = 0$; $y = 4$.

Вариант 17

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(10x^4 + 11\sqrt[8]{x^3} + \frac{15}{x^6} - \frac{4}{5x^5\sqrt{x}} \right) dx$; б) $\int \sqrt[3]{(2x+3)^2} dx$; в) $\int \frac{2dx}{4\sqrt{x+5}-7}$;

г) $\int (2x^2 - 15) \cdot e^{3x} dx$; д) $\int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^3 + 7x^2 + 12x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \pi$.

Вариант 18

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(\frac{6}{x^4} - \frac{8}{3x^3\sqrt{x^2}} + 8x + 8\sqrt[7]{x} \right) dx$; б) $\int \operatorname{tg}(\ln) \frac{dx}{x}$; в) $\int \frac{3dx}{6\sqrt{x+1}+7}$;

г) $\int (7x + 10) \cdot \sin 4x dx$; д) $\int \frac{3x^3 + x + 25}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$; $y = 2$; $x = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$; $y = 2$; $x = 0$.

Вариант 19

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(12x^2 + \frac{6}{x^4} + 5x\sqrt{x} - \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \right) dx$; б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^2}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+4}$;

г) $\int (2x^2 - 15) \cdot \cos 3x dx$; д) $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$; $y = 1 - 2x$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 20

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(10x^4 + 9\sqrt[8]{x} - \frac{5}{x^6} + \frac{9}{2x^5\sqrt{x}} \right) dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x-3)}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}-13}$;

г) $\int (1 - 8x^2) \cdot \cos 4x dx$; д) $\int \frac{5x^3 - 3x^2 - 12}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^3$; $x = 2x$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; x = 2; y = 0$.

Вариант 21

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(9x^2 + 15x\sqrt[7]{x} + \frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{8}{x^5} \right) dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5x+7}}$; в) $\int \frac{dx}{4 - \sqrt{x-3}}$;

г) $\int (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{3x} dx$; д) $\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x^3 - 9x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \sqrt{x}; x + y = 2; y = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2 + 4$ и осью OY .

Вариант 22

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{2x\sqrt{x}} - 15x\sqrt[7]{x} \right) dx$; б) $\int e^{4x+5} dx$; в) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-6}+3}$;

г) $\int (3x+4) \cdot \sin 6x dx$; д) $\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x^3 - 9x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \frac{1}{x}; x = 1; x = e; y = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}; y = 1; y = 2$.

Вариант 23

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(4\sqrt[3]{x} + 16x^3 + \frac{5}{x^2} - \frac{11}{5x\sqrt[5]{x}} \right) dx$; б) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$; в) $\int \frac{2dx}{4\sqrt{x+7}-5}$;

г) $\int (3x^2 + 5) \cdot \cos 2x dx$; д) $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{x^3 - 4x^2 + 3x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = x; x - y = 2$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}; x = 0; x = 2; y = 0$.

Вариант 24

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(9x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{9}{2x^4\sqrt{x}} + 11\sqrt[7]{x^4} \right) dx$; б) $\int \sin(3-2x) dx$; в) $\int \frac{3dx}{6\sqrt{x+7}+5}$;

г) $\int (2x-5) \cdot e^{4x} dx$; д) $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - 4x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4x - x^2$ и осью OX .

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$; $x = 3$; $x = 12$; $y = 0$.

Вариант 25

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(\frac{18}{x^4\sqrt{x}} + 8x^3 + \frac{3}{x^4} - 16\sqrt[11]{x^5} \right) dx$; б) $\int \operatorname{ctg}(2-5x) dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}+5}$;

г) $\int (4x-2) \cdot \sin 2x dx$; д) $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x^3 - 9x^2 + 20x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 - 2$; $y = 4 + x$.

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3$; $x = 0$; $x = 2$.

Вариант 26

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(14x^6 - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{3x^3\sqrt{x^2}} + 22\sqrt[8]{x^3} \right) dx$; б) $\int 5^{3x+8} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-1}$;

г) $\int (3x - x^2) \cdot e^{2x} dx$; д) $\int \frac{5x^3 + x^2 + 12x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = 1 - x$; $x = -3$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$; $x = 0$; $x = -2$; $y = 0$.

Вариант 27

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(8x^3\sqrt{x^2} - \frac{2}{x^3} + 12x^5 + \frac{10}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$; б) $\int \sqrt[5]{5x-7} dx$; в) $\int \frac{dx}{8 - \sqrt{2x-3}}$;

г) $\int e^{-3x} (6x-5) dx$; д) $\int \frac{3x^3 - 2x^2 - 6x - 12}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 4; x = -2; x = 2; y = 0$.
3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{4} - 1; y = 0$

Вариант 28

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(16x^3 + \frac{14}{x^8} - 13\sqrt[8]{x^5} + \frac{13}{4x^2 \cdot \sqrt[4]{x}} \right) dx$; б) $\int \operatorname{tg}(2-5x) dx$; в) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+6}+7}$;

г) $\int (2x-5) \cdot e^{4x} dx$; д) $\int \frac{x^4 + 4x^3 + x^2 + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x; x + y = 5; x = 0; x = 1$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1; y = 4$.

Вариант 29

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(9x^5 + \frac{7}{x^6} - 11x \cdot \sqrt[5]{x} + \frac{11}{4x \cdot \sqrt[4]{x^3}} \right) dx$; б) $\int \operatorname{tg}(2-7x) dx$; в) $\int \frac{2dx}{4\sqrt{x+6}-3}$;

г) $\int (1-5x^2) \cdot e^x dx$; д) $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 12}{x^3 - 6x^2 + 8x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 1; x + y = 3$.

3. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x; x = 0; x = 1; y = 0$.

Вариант 30

1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(2x + \frac{3}{x^4} - 13x \cdot \sqrt[5]{x} + \frac{12}{7\sqrt[7]{x^5}} \right) dx$; б) $\int 11^{7x-5} dx$; в) $\int \frac{3dx}{6\sqrt{2x-1}+7}$;

г) $\int (x^2 - 5x + 6) \cdot \sin 3x dx$; д) $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^3 - 4x} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 6x - x^2; y = 0$

3. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x; x = 0; y = 4$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Вариант 1

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = x^2 \sin^2 y; M_0 \left(-1; \frac{\pi}{4} \right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y \cdot x^y.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4; M_0 (2; 1,1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3;$$

$$б) z = \frac{u^2}{r+4}, u = \operatorname{arccctg} \sqrt{x+y}, r = e^{xy}.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^3 + 8y - 6xy + 1.$$

Вариант 2

1. Найти частные производные в данной точке:

$$U = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}; \quad M_0\left(0; \frac{1}{2}; 5\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y^2 \cdot x^y.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:
 $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2; M_0(-1; 0; 1).$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = \ln(e^x + e^{-y}), x = t^2, y = t^3;$$

$$б) z = 2u^2 - \sqrt{r}, u = \sin x + y, r = \sqrt{y} + \operatorname{arccctg} x.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = y\sqrt{x} - y^2 + 6y - x.$$

Вариант 3

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x^2}; \quad M_0(0; 0).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x \cdot \sin^2 xy.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x^2 y^3 e^{-x}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$3x - 2y + z = xz + 5; \quad M_0(2; 1; -1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = y^x, \quad x = \ln(t-1), \quad y = e^{\frac{t}{2}};$$

$$б) z = 2u^2 + \sqrt{r}, \quad u = \sin x + y^2, \quad r = y + \operatorname{arctg} x.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

Вариант 4

1. Найти частные производные в данной точке:

$$U = e^{xyz} \sin \frac{y}{x}; \quad M_0(2; 0; -1).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \ln(3x + y^{-2}).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$e^z + x + 2y + z = 4; \quad M_0(1; 1, 0).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = e^{y-2x+2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t;$$

$$б) z = u\sqrt{v}, \quad u = \sin^2 x, \quad v = \arcsin x.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

Вариант 5

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \ln \sin(x - 2y); M_0 \left(0; -\frac{1}{4} \right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y \cdot \cos^2 xy.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0; M_0 (1; 1, -1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = x^2 e^y, x = \cos t, y = \sin t;$$

$$б) z = \ln^2(2u + 3r), u = \sin x \cos y, r = \cos x \sin y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

Вариант 6

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = x^2 y; \quad M_0(1, 2).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y \cdot e^{\frac{-x}{y}}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = y^2 \cos x^2 y.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$z^3 + 3xyz + 3y = 7; \quad M_0(1; 1; 1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = \ln(e^x + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3;$$

$$б) z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad u = \sin x + \cos y, \quad v = \sin(xy).$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$$

Вариант 7

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \ln \operatorname{tg}(x + y); \quad M_0 \left(0, \frac{\pi}{4} \right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x \cdot y^x.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \operatorname{arccctg} \frac{x}{y}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}; \quad M_0 \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = x^y, x = e^t, y = \ln t;$$

$$б) z = 3u^2 - r, u = \cos y + x, r = \sqrt{y} + \operatorname{arctg} x - 1.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

Вариант 8

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \frac{x-y}{x+y}; \quad M_0(1,1).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \sin x^2 \cdot y^3.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = e^{x^2 y}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$e^{z-1} = \cos x \cos y + 1; \quad M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; 1\right).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = e^{x+2y}, x = \sin t, y = t^3;$$

$$б) z = \frac{2\sqrt{u}}{r^2 + 6}, u = \arccos(x+y) + \sqrt{x+y^2}, r = e^{x+y^2}.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^2 - 2y^2 + xy - 3x.$$

Вариант 9

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \sin y \ln x; \quad M_0(1, \pi).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{xy}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = y^3 e^x - x e^{-y}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0; \quad M_0(1; 2, 1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = x^2 e^{-y}, \quad x = \sin t, \quad y = \sin^2 t;$$

$$б) z = \ln^2 \frac{u}{r}, \quad u = \sin^2 x + y, \quad r = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + 2y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

Вариант 10

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = y^x; \quad M_0(1, e).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x^2 \cdot y^x.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = (x^2 + y^2)^3.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$xy = z^2 - 1; \quad M_0(0; 1; -1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = \ln(e^{-x} + e^y), \quad x = t^2, \quad y = t^3;$$

$$б) z = \ln \frac{u}{v}, \quad u = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad v = y \cos x.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$$

Вариант 11

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = x \ln \operatorname{tg}(x + y); \quad M_0 \left(0, \frac{\pi}{4} \right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x^2 y^3 e^{-x}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x \sin xy + y \cos xy.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2; \quad M_0(1; 1; 1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = e^{y-2x-1}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

$$б) z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \quad u = e^{2x+1+y}, \quad v = e^{2y-1+x}.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$$

Вариант 12

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = 3x^2 + xy - y^3 - 5; \quad M_0(2,1).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \sqrt{2xy + x^2}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \sin(x + \cos y).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5; \quad M_0(0; 2; 1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \quad x = \sin t, \quad y = \cos t;$$

$$б) z = \sqrt[3]{r^3 + u^3 + 3ru}, \quad r = \sin x \cos y, \quad u = \cos x \sin y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$$

Вариант 13

1. Найти частные производные в данной точке:

$$u = t^5 \sin^3 z; \quad M_0 \left(1, \frac{\pi}{2} \right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \arcsin \sqrt{xy}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x^2 \ln(x + y).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = \frac{\pi}{2}; \quad M_0 \left(0; \frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = \arccos \left(\frac{2x}{y} \right), \quad x = \sin t, \quad y = \cos t;$$

$$б) z = 3u^3 + \sqrt{r}, \quad r = \sin y + x, \quad u = \sqrt{x} + \operatorname{arccot} y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = (x - 5)^2 + y^2 + 1.$$

Вариант 14

1. Найти частные производные в данной точке:

$$u = \lg(x^2 + y^2); \quad M_0(2, 1).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \cos^2 x^2 y.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \ln(3y - x^{-2}).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$3x^2 y^2 + 2xyz^2 - 2x^3 z + 4y^3 z = 4; \quad M_0(2; 1; 2).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) u = \frac{x^2}{y+1}, \quad x = 1 - 2t, \quad y = \arctgt;$$

$$б) z = \frac{u^2}{r}, \quad u = x - 2y, \quad r = x + 2y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Вариант 15

1. Найти частные производные в данной точке:

$$u = xy^2 - \frac{x}{y}; \quad M_0(3, -2).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^{-2} + y^{-2})^3}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0; \quad M_0(1; 1; 1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) \quad u = \frac{x}{y}, \quad x = e^t, \quad y = 2 - e^{2t};$$

$$б) \quad z = \frac{u^2 + r^2}{2}, \quad u = xy, \quad r = \frac{x}{y}.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

«Ряды»

Вариант № 1

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+1)^n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n(n-1)!}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \cos^2 x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$.

Вариант № 2

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} x^{2n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n(3n+1)}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ по степеням $(x+1)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Вариант № 3

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n+2)!}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = e^{\cos x}$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ по степеням $(x+4)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$
 $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$.

Вариант № 4

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{2!}{10} + \frac{3!}{10^2} + \frac{4!}{10^3} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = xe^{-2x}$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \cos x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$.

Вариант № 5

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n} x^n}{(2n-1)!}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = x^3 \ln x$ по степеням $(x-1)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x}{x} dx$.

Вариант № 6

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{4^n (2n-1)}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \cos \frac{x}{4}$ по степеням $(x-\pi)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

Вариант № 7

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $1 + 2!x + 3!x^2 + \dots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n (x-2)^n}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \ln \cos x$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ по степеням $(x+2)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^2) dx.$$

Вариант № 8

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 9^n}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \cos(x-1)$ по степеням $(x-1)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2} \cos x dx.$$

Вариант № 9

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{5^n (n+1)}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ по степеням $(x-2)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^3) dx.$$

Вариант № 10

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}.$

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $1 + \frac{4}{1 \cdot 2} + \frac{9}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}},$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n 3^n}{3n+8}.$

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \cos^2 x$

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ по степеням $(x-2).$

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx.$

Вариант № 11

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 13}.$

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n,$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням $(x-1).$

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctg x^2 dx.$

Вариант № 12

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n (x+4)^n}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \ln(x + e^x)$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \sin x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{1+x^2} dx$,

Вариант № 13

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{n^4 + 1}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{10^x}{x}$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \ln x$ по степеням $(x-4)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$.

Вариант № 14

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n},$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}.$$

$$4. \text{ a)} \text{ Разложить функцию в ряд Маклорена: } f(x) = \frac{2^x}{x}.$$

$$\text{б)} \text{ Разложить в ряд Тейлора: } f(x) = \cos^2 x \text{ по степеням } \left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$5. \text{ Вычислить заданный интеграл с заданной точностью } \alpha = 0,001 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Вариант № 15

$$1. \text{ Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}.$$

$$2. \text{ Исследовать числовой ряд на сходимость: } \frac{2}{1^2+1} + \frac{4}{2^2+1} + \frac{6}{3^2+1} + \dots$$

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x,$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(x+3) \cdot 3^n}.$$

$$4. \text{ a)} \text{ Разложить функцию в ряд Маклорена: } f(x) = \frac{9}{20-x-x^2}.$$

$$\text{б)} \text{ Разложить в ряд Тейлора: } f(x) = \ln x \text{ по степеням } (x-1).$$

$$5. \text{ Вычислить заданный интеграл с заданной точностью } \alpha = 0,001 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x^3} dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

Вариант № 16

$$1. \text{ Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 56n - 33}.$$

$$2. \text{ Исследовать числовой ряд на сходимость: } \frac{2}{1^2+1} + \frac{4}{2^2+1} + \frac{6}{3^2+1} + \dots$$

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2},$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}.$$

$$4. \text{ a)} \text{ Разложить функцию в ряд Маклорена: } f(x) = \frac{7}{12-x-x^2}.$$

$$\text{б)} \text{ Разложить в ряд Тейлора: } f(x) = \ln(x+2) \text{ по степеням } (x-5).$$

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Вариант № 17

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 21n - 10}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{2}{1! \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3! \cdot 2^3} + \dots$

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{3^n n!}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{x}$ по степеням $(x-3)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$
 $\int_0^{\frac{1}{4}} x \cos \sqrt{x} dx$.

Вариант № 18

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \dots$

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = (x-1)\sin 5x$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ по степеням $(x+1)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx$.

Вариант № 19

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots$
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
 - а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$,
 - б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{4^n n}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{6}{8 + 2x - x^2}$.
 б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{1 + 3x}$ по степеням $(x+1)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$.

Вариант № 20

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \dots$
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
 - а) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$,
 - б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2^n (x+2)^n}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \ln(1 - x - 12x^2)$.
 б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$ по степеням $(x+2)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx$.

Вариант № 21

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 21n - 10}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^{2n}}{n+1}.$$

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{5}{6+x-x^2}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням $(x-4)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Вариант № 22

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 - 3n - 2}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^n n!}.$$

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ по степеням $(x-1)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx$.

Вариант № 23

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{4^n (3n-1)}.$$

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \ln(1+x-12x^2)$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = e^{3x}$ по степеням $(x-1)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

Вариант № 24

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n} x^n}{(2n-1)!}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = x^3 \ln x$ по степеням $(x-1)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x}{x} dx$

Вариант № 25

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{3^n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{8^n \cdot n}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{\arcsin x}{x-1}$.
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = 2^x$ по степеням $(x-3)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x} dx$.

Вариант № 26

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{2}{1} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \dots$

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n (n-2)^2}{2n+3}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \ln(1+2x-8x^2)$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ по степеням $(x-3)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} x^3 dx$.

Вариант № 27

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 8} + \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{(n+1)5^n}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \operatorname{arctg} x$ по степеням $(x-1)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3} dx$.

Вариант № 28

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \dots$.

3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}$.

4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x$.

б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = e^{5x}$ по степеням $(x+1)$.

5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x^3}{x^3} dx$.

Вариант № 29

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $10 + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 3^n}{\sqrt[3]{x}}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \sin x \cos x$
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ по степеням $(x+1)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$.

Вариант № 30

1. Найти сумму ряда и написать 3 первых члена ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$.
2. Исследовать числовой ряд на сходимость: $1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots$.
3. Найти интервал сходимости функционального ряда, исследовать на сходимость на концах интервала, записать пример расходящегося ряда:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$.
4. а) Разложить функцию в ряд Маклорена: $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$
б) Разложить в ряд Тейлора: $f(x) = \ln x$ по степеням $(x-1)$.
5. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью $\alpha = 0,001$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	3
1.1 Первообразная функции и неопределенный интеграл.....	3
1.2 Непосредственное интегрирование.....	5
1.3 Интегрирование методом подстановки.....	7
1.4 Интегрирование по частям.....	10
1.5 Интегрирование рациональных функций.....	13
1.6 Интегрирование тригонометрических выражений.....	19
ГЛАВА 2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	22
2.1 Определенный интеграл и его основные свойства.....	22
2.2 Правила вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница	23
2.3 Приложение определенного интеграла.....	27
2.3.1 Вычисление площадей плоских фигур.....	27
2.3.2 Вычисление объемов тел вращения.....	29
ГЛАВА 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ	33
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	
3.1 Область определения функции.....	33
3.2 Частные производные функции нескольких переменных.....	34
3.3 Полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.....	37
3.4 Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявной функции.....	40
3.5 Частные производные и дифференциалы высших порядков.....	44
3.6 Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....	48
3.7 Экстремум функции двух переменных.....	49
3.8 Производная по направлению. Градиент функции.....	52
3.9 Комплексные числа.....	55
3.9.1 Геометрическое представление, модуль и аргумент комплексного числа.....	55
3.9.2. Арифметические действия над комплексными числами.....	56
3.9.3. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.....	60
ГЛАВА 4 РЯДЫ	65
4.1 Числовые ряды	65
4.2 Знакопеременные ряды	73
4.3 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.....	76
4.4 Функциональные ряды.....	78
4.5 Степенные ряды	80
4.6 Ряды Тейлора и Маклорена	83
4.7 Некоторые приложения степенных рядов	88
4.7.1 Вычисление значений функций	88
4.7.2 Вычисление определенных интегралов	89
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 Интегрирование функций	92
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 Функции нескольких переменных.	101
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 Ряды.....	116